

5. Considerăm mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 1 - 2x < 11\} \text{ și } B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{x+2}{6} \leq \frac{3}{5} \right\}.$$

a) Determinați $A \cap \mathbb{Z}$.

b) Scrieți mulțimile A și B sub formă de intervale.

6. Fie numerele $a = \sqrt{2} - 1$ și $b = \sqrt{2} + 1$.

a) Calculați $a \cdot b$ și $a^2 + b^2$.

b) Determinați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b .

c) Indicați un număr rațional și unul irațional din intervalul (a, b) .

7. Considerăm mulțimea $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{100}\}$.

a) Câte numere irrationale conține mulțimea A ?

b) Calculați suma numerelor raționale din mulțimea A .

c) Câte numere din mulțimea A sunt mai mici decât 5,1?

8. Fie numerele $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

a) Calculați $a \cdot b$.

b) Calculați $(a+b)^2$.

c) Arătați că numărul $b : a - \sqrt{2}$ este rațional.

9. Fie $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$.

b) Demonstrați că $\sqrt{x^2 - 6x + 10} \geq 1$.

c) Determinați x și y pentru care expresia $\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{9y^2 + 6y + 10}$ are valoarea minimă.

10. Fie $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$.

a) Dacă $x + y\sqrt{2} = 0$, arătați că $x = y = 0$.

b) Dacă $x + y\sqrt{2} = z + t\sqrt{2}$, demonstrați că $x = z$ și $y = t$.

c) Determinați x și y , știind că $x(1+2\sqrt{2}) + y(1+\sqrt{2}) = 2+4\sqrt{2}$.

TEMA 5. Calculi algebrici

Partea I

Calculați:

1. $2(3x+1) + 3(1-2x)$;

3. $x \cdot x + x + x : x$;

5. $x^8 : x^7 + x^6 - x^4 : x^3 + x^2 : x$;

7. $(x-2)(x+2) + 4$;

9. $(x+4)(x-3) - (x+12)$;

2. $3(x^2 - 2x - 2) + x(6 - 3x)$;

4. $(2\sqrt{3} \cdot x^2) : (3x^2)$;

6. $(x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4) : x^{10} \cdot x$;

8. $(x-3)(x+3) - (x+3)^2 + 3(2x+7)$;

10. $x^2 - 7x + 5 - (x+8)(x-1)$;

11. $(2x+1)^2 - (2x-1)^2$;

13. $(x^2+x+1)^2 - (x^2+x)^2$;

14. $(x^2-x+2)^2 + x^2(-x^2+2x-5)$;

15. Se consideră expresia $E(x) = (x+1)^2 - |x+1|$. Calculați $E(0)$ și $E(-1)$.

16. Se consideră expresia $E(x) = (1-x)^{1001} + (x-1)^{1001}$. Calculați $E(2)$.

17. Se consideră expresia $E(x) = x^4 + 3x^2 - 5$. Calculați valoarea expresiei pentru $x = \sqrt{5}$.

18. Se consideră expresia $E(x) = x^2 + x + \sqrt{2}(2\sqrt{3}+1)$. Calculați valoarea expresiei pentru $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Stabiliți valorile de adevăr ale propozițiilor:

19. "Pentru orice număr real x , are loc egalitatea $(x+1)^2 = x^2 + 1$."

20. "Există un număr real x pentru care are loc egalitatea $(x+1)^2 = x^2 + 1$."

21. Știind că $a - b = 4$ și $a^2 - b^2 = 24$, calculați $a + b$.

22. Știind că $a + b = 4$ și $a \cdot b = 2$, calculați $\frac{a}{1} + \frac{b}{1}$.

23. Știind că $a + b = 4$ și $a \cdot b = 2$, calculați $a^2 + b^2$.

24. Știind că $x - \frac{1}{x} = 2$, calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

25. Știind că $a - b = 1$, calculați $a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 1$.

26. Știind că $a + b = 4$ și $ac + bc + bd = 4\sqrt{3}$, calculați $c + d$.

Descompuneți în factori:

27. $x^2 - 5x$;

29. $x(x+1) - x - 1$;

31. $xy - x - y + 1$;

33. $25x^2 - 49$;

35. $x^2 + 6x + 9 - y^2$;

37. $x^2 - 5x + 6$;

39. $2x^2 + x - 1$;

40. $x^3 + x^2 - 16x - 16$.

41. Se consideră raportul $F(x) = \frac{3-x^2}{x^2+2}$. Calculați $F(\sqrt{2})$.

42. Se consideră raportul $F(x) = \frac{x^2}{x-4}$. Determinați mulțimea valorilor lui x pentru care $F(x)$ este bine definit.

43. Se consideră raportul $F(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$. Determinați mulțimea valorilor lui x pentru care $F(x)$ nu are sens.

44. Amplificați cu $x-2$ raportul $\frac{x}{2x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

